Problemas propuestos en el
XXXV Concurso "Puig Adam"

NIVEL I (3º de E.S.O.)

Primera parte *(1 hora 30 minutos)*

Problema 1 *(7 puntos)*

El rectángulo de la Fig. 1 está dividido en seis regiones. Cinco de ellas, que no están sombreadas, son cuadrados. Si el área del cuadrado A es 144 y el área del cuadrado B es 100, ¿cuál es el área del rectángulo sombreado?

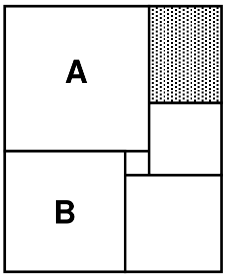


Fig. 1

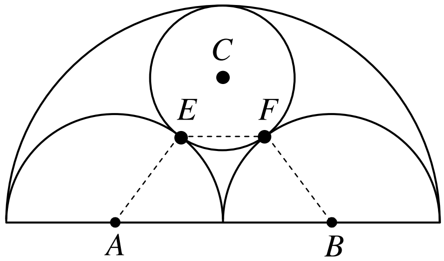


Fig. 2

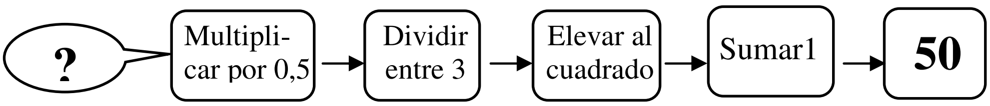
Problema 2 *(7 puntos)*

En un semicírculo de radio 2 dibujamos dos semicircunferencias de radio 1 con centros A y B (Fig. 2) y una circunferencia con centro C y tangente a las tres semicircunferencias. Los puntos E y F son los de tangencia de la circunferencia con las dos semicircunferencias pequeñas. Calcula el área del trapecio $ABFE$.

Segunda parte: problema encadenado (*1 hora 30 minutos*)

Problema 1A *(1 punto)*

Para llegar a 50 en la siguiente cadena de operaciones, ¿por qué número positivo tendrías que haber comenzado?



Problema 2A *(1,5 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior y n la suma de las cifras de T. La media de las edades del abuelo, la abuela y sus n nietos es 28 años. La media de las edades de los nietos es 10 años. Si el abuelo tiene 4 años más que la abuela, ¿qué edad tiene el abuelo?.

Problema 3A *(2 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior y k el cociente de sus cifras ($k > 1$). En la Fig. 3 se muestra un cuadrado de lado k y dos semicircunferencias de diámetros AB y AD. ¿Cuál es el área de la región sombreada?

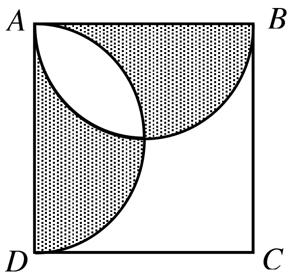


Fig. 3

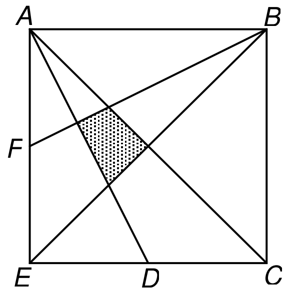


Fig. 4

Problema 1B *(1 punto)*

Sean m, n, p y q números enteros diferentes tales que $2^m + 2^n - 2^p + 2^q = 131$. Calcula $m + n + p + q$.

Problema 2B *(1,5 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior. Andrés y Beatriz deciden ir en moto desde un pueblo hasta otro que se encuentra a $4T$ km de distancia. Andrés va a una velocidad constante de 50 km/h . En cambio Beatriz conduce la mitad del trayecto a 40 km/h y la otra mitad a 60 km/h. Calcula la diferencia, en segundos, entre los tiempos que emplean cada uno.

Problema 3B *(2 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $P + S = C$ donde P es un número primo, S un cuadrado perfecto y C un cubo perfecto, todos menores que T. Por ejemplo: $7 + 1 = 8$ es una solución.

Problema 4 *(5 puntos)*

Sea a la respuesta del problema 3A, b la respuesta del problema 3B. En el cuadrado de la Fig. 4 la longitud de sus lados es b/a, D y F son los puntos medios de los lados CE y EA, respectivamente. Calcula el área del cuadrilátero sombreado.

NIVEL II (4º de E.S.O.)

Primera parte *(1 hora 30 minutos)*

Problema 1 *(7 puntos)*

Cinco enteros positivos consecutivos, $p < q < r < s < t$, todos menores que 2000, tienen por suma un cuadrado perfecto, mientras que la suma de los tres centrales, q, r y s es un cubo perfecto. Calcula la raíz cuadrada de la suma de los cinco.

Problema 2 *(7 puntos)*

En el trapecio $ABCD$ de la Fig. 5 se verifica que el área del triángulo ABC es 150 y el área del triángulo ACD es 120. Calcula el área del triángulo BCT.

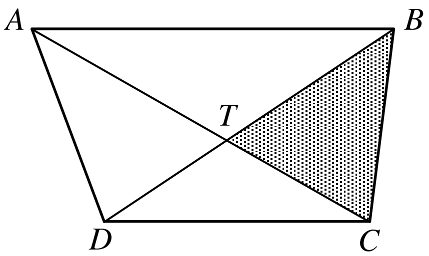


Fig. 5

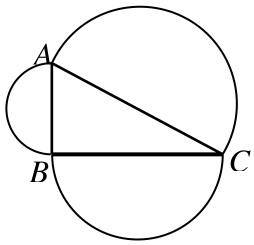


Fig. 6

Segunda parte: problema encadenado *(1 hora 30 minutos)*

Problema 1A *(1 punto)*

Los lados del triángulo rectángulo ABC con ángulo recto en B, son diámetros de tres semicircunferencias, como muestra la Fig. 6. Si el área del semicírculo de diámetro AB es 8π y la longitud del arco de diámetro AC es $17\pi/2$, calcula la longitud del diámetro BC.

Problema 2A *(1,5 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior. La media de una lista de $T - 4$ enteros positivos es 10, la mediana es 9 y la única moda que es 8. ¿Cuál es el mayor entero que puede aparecer en dicha lista?

Problema 3A *(2 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior y $k=T/5$. ¿Cuántos enteros n, de tres cifras pero no mayores que 200, verifican que $(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ es divisible entre k?

Problema 1B *(1 punto)*

Obtén la única solución real de la ecuación $\sqrt{7-2x} = 2x-1$.

Problema 2B *(1,5 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior. Si el cociente entre los radios de las circunferencias concéntricas de la Fig.7 es T, calcula el cociente entre el área de la parte de corona circular sombreada y el área del sector circular OBC.

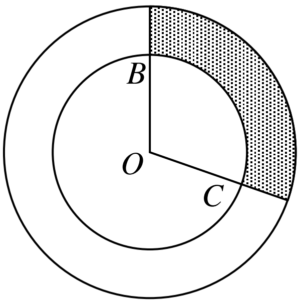


Fig. 7

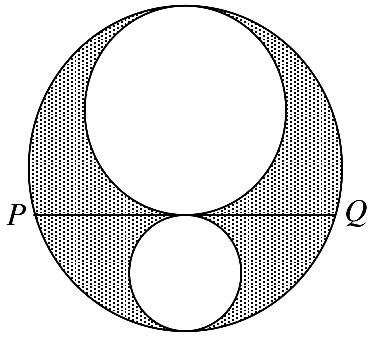


Fig. 8

Problema 3B *(2 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior y $k = 4T$. Calcula la diferencia entre el perímetro y el doble de la hipotenusa de un triángulo rectángulo en el que el radio del círculo inscrito es k.

Problema 4 *(5 puntos)*

Sea a la respuesta del problema 3A, b la respuesta del problema 3B y sea k la suma de todas las cifras de a y b. En la Fig. 8 se observan dos circunferencias más pequeñas, tangentes entre sí y también tangentes a la circunferencia mayor. Si el área de la zona sombreada es igual a $k\pi$, ¿cuál es la longitud de PQ?

NIVEL III (1º de Bachillerato)

Primera parte *(1 hora 30 minutos)*

Problema 1 *(7 puntos)*

En el conjunto de los números reales positivos definimos la función f mediante la expresión:

$$f(x)=\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^6-\left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)-2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)}\quad .$$

¿Cuál es el valor mínimo que toma f? ¿Para qué valor de x se alcanza ese valor mínimo?

Problema 2 *(7 puntos)*

¿Cuál es el área del círculo de la figura en el que los lados del hexágono inscrito, de manera consecutiva, son: 1, 1, 1, 2, 2, 2?

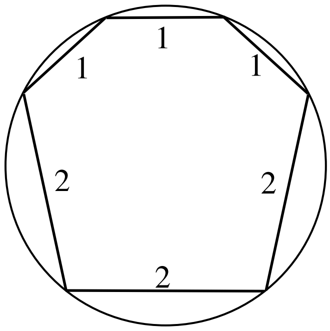


Fig. 9

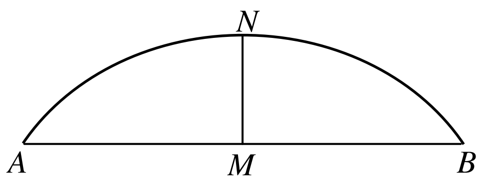


Fig. 10

Segunda parte: problema encadenado *(1 hora 30 minutos)*

Problema 1A *(1 punto)*

La media de seis números reales distintos es 275, la media de los cuatro más pequeños es 200 y la media de los cuatro mayores es 340. ¿Cuál es la media de los dos centrales?

Problema 2A *(1,5 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior. Calcula el perímetro de un rectángulo cuya área es $(2T+1)/8$ y su diagonal $T/2$.

Problema 3A *(2 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior y k un número real tal que el área de la región situada por encima del eje de abscisas y formada por los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen las desigualdades: $|2x|+|y| \leq 2k$; $|x|+|y| \geq k$ es T. Calcula k.

Problema 1B *(1 punto)*

Si *a* es la solución de la ecuación $\log_{\sqrt{2}} x = 20$, calcula $\log_2 \sqrt{a}$.

Problema 2B *(1,5 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior. En "*Relevoslandia*" la unidad monetaria es el "*relev*". Esteban tiene billetes de 20 relevs y billetes de 80 relevs, siendo la media de relevs por billete $7T - 1$. ¿Cuál es el menor número de billetes que puede tener Esteban?

Problema 3B *(2 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior. Antonio tiene T/15 monedas y Beatriz T/6 todas perfectamente equilibradas. Cada uno tira sus monedas y gana quien obtenga más caras. Si la probabilidad de que gane Antonio es p/q, fracción irreducible, calcula $p + q$.

Problema 4 *(5 puntos)*

Sean a y b las respuestas de los problemas 3A y 3B, respectivamente y sea $k = 3(b - a)$. En la anterior Fig. 10 se observa un segmento circular en el que la cuerda AB es kn y la flecha, MN, es n. Si n es un entero positivo, ¿cuál es el menor valor de n para el que el radio del círculo al que pertenece dicho segmento circular, sea también un entero positivo?